

ФІЗИКА. МАТЕМАТИКА

УДК 514.116(07)

DOI: 10.37026/2520-6427-2021-108-4-110-113

Наталія ГЕНСИЦЬКА-АНТОНЮК,

кандидат педагогічних наук,
доцент кафедри математики
з методикою викладання
Рівненського державного
гуманітарного університету,
м. Рівне, Україна

ORCID: 0000-0002-5845-8343

e-mail: nataliia.hensitska-antoniuk@rshu.edu.ua

ФОРМУВАННЯ УМІНЬ СТАРШОКЛАСНИКІВ РОЗВ'ЯЗУВАТИ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ

Анотація. У статті аналізується проблема формування вмінь старшокласників щодо розв'язування тригонометричних рівнянь. Розглядаються основні вимоги до навчальних досягнень учнів, зокрема наявність відповідних знань, умінь стосовно видів діяльності, що зазначені в програмі з математики та визначають предметну компетентність.

Авторкою окреслено теоретичні аспекти поняття «вміння» та досліджено етапи формування вмінь у навчальній діяльності. Крім того, виокремлено три етапи формування вмінь розв'язувати тригонометричні рівняння: початковий, проміжний та заключний. Досліджено, що ефективність розвитку вмінь залежить від рівня раніше сформованих математичних компетентностей учнів та організації навчального процесу вчителем.

У статті обгрунтовано місце тригонометричних рівнянь у програмі курсу алгебри і початків аналізу та у завданнях зовнішнього незалежного оцінювання. Підкреслено, що тригонометричні рівняння належать до теми «Тригонометричні функції», що є найбільшою

темою алгебри 10-го класу. У програмі рівня стандарту виділено такі види тригонометричних рівнянь, як найпростіші та рівняння, що зводяться до алгебраїчних. Аналіз програми та завдань зовнішнього незалежного оцінювання у контексті нашого дослідження засвідчили наявність нескладних тригонометричних рівнянь, які зводяться до найпростіших. Урахувавши етапи формування вмінь та подані завдання, окреслено послідовність дій та наведено методи розв'язування тригонометричних рівнянь на кожному з етапів.

Розглянувши завдання на відповідних етапах, слід відзначити, що формування вмінь старшокласників розв'язувати тригонометричні рівняння здійснюється водночас із розвитком знань та навичок. У зв'язку з цим визначено, що вміння легко формуються за умов свідомого розуміння одиничного тригонометричного кола, властивостей тригонометричних функцій, графіків та знань тригонометричних тотожностей.

Ключові слова: формування вмінь, тригонометричні рівняння, методи розв'язування.

Nataliia HENSITSKA-ANTONIUK,

Candidate of Pedagogical Sciences,
Associate Professor
of Mathematics with teaching methods,
Rivne State Humanities University,
Rivne, Ukraine

ORCID: 0000-0002-5845-8343

e-mail: nataliia.hensitska-antoniuk@rshu.edu.ua

DEVELOPING THE SKILLS OF HIGH SCHOOL STUDENTS OF SOLVING TRIGONOMETRIC EQUATIONS

Abstract. The article considers the problem of forming the skills of high school students to solve trigonometric equations. The main requirements for students' academic achievements, namely: knowledge, skills, types of activities specified in the program in mathematics, determine the subject competence.

In particular, it is clarified what such a skill is and the stages of formation of skills in educational activity are investigated. Thus, there are three stages of skills formation:

initial, intermediate and final. The effectiveness of skills formation depends on the level of previously formed, mathematical competencies of students and the organization of teacher education.

The place of trigonometric equations in the program of the course of algebra and the beginnings of the analysis and in problems of external independent estimation is investigated in the article. Trigonometric equations are included in the topic «Trigonometric functions», which is

the largest topic in 10th grade algebra. The program of the standard level distinguishes such types of trigonometric equations as: the simplest and those that are reduced to algebraic. The analysis of the program and tasks of external independent evaluation showed the presence of simple trigonometric equations, which are reduced to the simplest.

Taking into account the stages of skill formation, the tasks are given, the sequence of actions is outlined, the methods of solving trigonometric equations at each of the stages are given.

Having considered the tasks at each stage, it should be noted that the formation of skills of high school students in solving trigonometric equations is closely related to the formation of knowledge and skills. Skills are easily formed under the conditions of conscious understanding of a single trigonometric circle, properties of trigonometric functions, graphs and knowledge of trigonometric identities.

Key words: skills formation, trigonometric equations, methods of solving.

Постановка проблеми. Формування в учнів умінь розв'язувати задачі є основною метою вчителя математики у процесі навчання. Важливою характеристикою таких умінь є усвідомлення навчального матеріалу та цілеспрямованість у досягненні відповідного результату.

Тригонометричні рівняння є важливою темою шкільного курсу алгебри та початків аналізу 10-го класу (Навчальні програми для 10–11 класів, 2018). Зважаючи на власний досвід, слід відзначити, що в учнів досить часто виникають проблеми під час розв'язування означених рівнянь. За цієї умови знання одиничного тригонометричного кола, властивостей тригонометричних функцій та їх графіків, умінь розв'язувати рівняння графічним способом є складовими усвідомленого розв'язування тригонометричних рівнянь.

Аналіз зовнішнього незалежного оцінювання дозволяє стверджувати, що завдань, котрі містять тригонометричні рівняння, є небагато, однак труднощі у їх розв'язанні та широке застосування тригонометрії в науці та техніці доводять актуальність теми нашого дослідження (Тести ЗНО онлайн. Завдання за темами з математики: вебсайт).

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Уміння як елемент діяльності характеризують у своїх наукових працях багато вчених, зокрема О. Усова та О. Леонт'єв. Виокремлення етапів формування вмінь розв'язувати тригонометричні рівняння слугували основою наукових пошуків Л. Фрідмана і Є. Мілеряна. На сучасному етапі низка досліджень присвячена формуванню вмінь щодо організації та здійснення суто педагогічної діяльності, з-поміж яких варто відзначити результати наукових досліджень О. Сергєєнкової та Р. Павелківа.

Види тригонометричних рівнянь та методи їх розв'язання широко представлені у вітчизняній психолого-педагогічній літературі, зокрема у змісті наукових праць А. Мордковича, І. Кушніра, В. Гетманцева, В. Литвиненко та ін. Узагальнені теоретичні основи розв'язування тригонометричних рівнянь для учнів закладів загальної середньої освіти знайшли своє відображення в наукових працях А. Капіносова, А. Мерзляка, Т. Роевої та ін.

Метою статті є аналіз методики формування вмінь старшокласників розв'язувати тригонометричні рівняння.

Виклад основного матеріалу дослідження. Поняття «вміння» слід трактувати як здатність учня розв'язувати певні завдання, що ґрунтуються на відповідних знаннях та видах діяльності. У психолого-педагогічній літературі можна виокремити низку етапів щодо формування означених умінь: початковий або підготовчий, проміжний або аналітичний, синтетичний та етап автоматизації (Мілерян, 2013). Однак етап автоматизації можна віднести до стадії формування відповідних навичок, тому нами виокремлено лише три основні етапи формування вмінь: підготовчий (учитель пропонує підготовчі вправи, що ґрунтуються на раніше засвоєних знаннях, умінь і навиках); проміжний (розглядаються види найпростіших тригонометричних рівнянь та методи їх розв'язування); заключний (виконання різноманітних рівнянь з усвідомленням їх видів та методів розв'язування).

Із метою формування початкових умінь розв'язувати тригонометричні рівняння слід виконати підготовчі вправи на одиничному тригонометричному колі, що ґрунтуються на попередньо засвоєних знаннях. Наведемо приклад такого завдання: знайти значення синуса, косинуса, тангенса та котангенса кутів:

$\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}; \frac{11\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}; 1; -1; 0$. Врахуйте, що

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x}; ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Обернені завдання:

1. Синусом, косинусом яких кутів є значення: $\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 1; -\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -1; 0$. Запишіть відповідь, врахувавши період синуса та косинуса.

2. Тангенсом, котангенсом якого кута є значення: $1; -1; \sqrt{3}; -\sqrt{3}; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}$, зважаючи, що $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$;

$ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$. Запишіть відповідь, врахувавши період тангенса та котангенса.

Для яких кутів немає значення тангенса та котангенса.

Якщо ж планується розв'язувати тригонометричні рівняння графічним способом, необхідно актуалізувати знання щодо розв'язування рівнянь $f(x) = a$, $f(x) = g(x)$ графічним способом, а також графіків тригонометричних функцій. Таким чином, можна сформулювати завдання такого виду: задано функції $f(x) = \sin x$, $g(x) = -1$. Завдання виконуйте на одному рисунку:

1. Побудуйте графік функції $f(x)$ на проміжку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

2. Побудуйте графік функції $g(x)$.

3. Позначте спільну точку графіків $f(x)$ і $g(x)$ та запишіть її координати.

4. Знайдіть множину всіх розв'язків рівняння $f(x) = g(x)$ на множині R .

Отже, учні самостійно знаходять розв'язки:

$$1) \sin x = a \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi n, \\ x = \pi - \alpha + 2\pi n, \end{cases} \Rightarrow x = (-1)^n \alpha + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$2) \cos x = a \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi n, \\ x = -\alpha + 2\pi n, \end{cases} \Rightarrow x = \pm \alpha + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$3) tgx = a \Rightarrow x = \alpha + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$4) ctgx = a \Rightarrow x = \alpha + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Такі завдання є елементами евристичного методу, тобто учні самостійно, завдяки вміль організації роботи, використовуючи попередні знання, виводять формули розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь, як-от:

$$\begin{aligned} x &= (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n, \\ x &= \arctg a + \pi n, \\ x &= \operatorname{arccctg} a + \pi n, \quad n \in Z. \end{aligned}$$

Досить часто під час розв'язування рівнянь $\cos x = a$, де $-1 < a < 0$ учні припускаються помилки, наприклад, розв'язуючи рівняння $\cos x = -\frac{1}{2}$, зазначають відповідь $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$. У такому випадку слід знову проаналізувати одиничне тригонометричне коло і звернути увагу на знаки тригонометричних функцій кутів у кожній чверті. Таким чином, косинус кута набуває від'ємних значень у II і III чвертях. Зважаючи на це, наголошуємо, що кут другої чверті знаходимо як $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, а третьої — $-\frac{2\pi}{3}$.

На цьому ж етапі можна розв'язувати елементарні тригонометричні рівняння із параметром виду: $\cos x = 2a - 1, \sin x = a^2 - 6a + 5$ та ін., врахувавши область значень косинуса та синуса. На проміжному етапі формування вмінь, використовуючи попередні знання, учням пропонуємо для розв'язку більш складніші рівняння. Загалом до найпростіших рівнянь належать рівняння виду $A \sin(kx \pm B) = a, A \cos(kx \pm B) = a, A \operatorname{tg}(kx \pm B) = a, A \operatorname{ctg}(kx \pm B) = a$, що зводяться до розглянутих вище.

Окреслимо методику розв'язування рівнянь виду $\sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$ (Мерзляк, 2018). Звертаємо увагу учнів на відмінність цих рівнянь щодо $\cos x = a$. Таким чином, діленням на $\sqrt{2}$ перетворюємо рівняння до найпростішого тригонометричного складеного кута $\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} 2x - \frac{\pi}{2} &= \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\pi n, & 2x - \frac{\pi}{2} &= \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ 2x &= \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, & x &= \pm \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z. \end{aligned}$$

Використовуючи основні тригонометричні тотожності, рівняння виду $2 \sin x \cos x = 1 \Rightarrow \sin 2x = 1$ також зводяться до найпростіших.

У програмі з математики рівня стандарту виділені такі тригонометричні рівняння: найпростіші та ті, що зводяться до алгебраїчних. Рівняння виду

$$\begin{aligned} a \sin^2 x + b \sin x + c = 0, \quad a \cos^2 x + b \sin x + c = 0, \\ a \sin^2 x + b \cos x + c = 0, \quad a \cos 2x + b \sin x + c = 0, \end{aligned}$$

$a \operatorname{tg} x + b \operatorname{ctg} x = 0$ та інші можна звести до алгебраїчних, уводячи заміну.

Задля покращення ефективності процесу формування відповідних знань та вмінь доречно подати алгоритми та методи розв'язування різних видів тригонометричних рівнянь, які зводяться до алгебраїчних. Під час розв'язування рівнянь цього виду спершу необхідно звести рівняння до однієї функції, використовуючи такі формули: $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a, \sin^2 a = 1 - \cos^2 a, \cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$.

Проілюструємо методику розв'язування тригонометричних рівнянь, що зводяться до алгебраїчних:

1) $a \sin^2 x + b \sin x + c = 0$. Введемо заміну $\sin x = t, -1 \leq t \leq 1$, тоді рівняння зведеться до квадратного $at^2 + bt + c = 0$. Знайшовши корені квадратного рівняння і врахувавши,

що $-1 \leq t \leq 1$, отримаємо $\begin{cases} \sin x = t_1 \\ \sin x = t_2 \end{cases}$, тоді

$$\begin{cases} x_1 = (-1)^n \arcsin t_1 + \pi n \\ x_2 = (-1)^n \arcsin t_2 + \pi n \end{cases}, \quad n \in Z;$$

2) $a \cos^2 x + b \sin x + c = 0$. Означене рівняння перетвориться на попереднє, замінивши $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Тоді $a(1 - \sin^2 x) + b \sin x + c = 0, a - a \sin^2 x + b \sin x + c = 0, a \sin^2 x - b \sin x - (a + c) = 0$;

3) $a \sin^2 x + b \cos x + c = 0$. Рівняння перетвориться на квадратне, замінивши $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Тоді $a(1 - \cos^2 x) + b \cos x + c = 0, a - a \cos^2 x + b \cos x + c = 0, a \cos^2 x - b \cos x - (a + c) = 0$. Вводимо заміну $\cos x = t, -1 \leq t \leq 1, at^2 - bt - (a + c) = 0$. Знайшовши корені квадратного рівняння і врахувавши, що

$-1 \leq t \leq 1$, отримаємо $\begin{cases} \cos x = t_1 \\ \cos x = t_2 \end{cases}$.

Тоді $\begin{cases} x_1 = \pm \arccos t_1 + 2\pi n \\ x_2 = \pm \arccos t_2 + 2\pi n \end{cases}, \quad n \in Z;$

4) $a \cos 2x + b \sin x + c = 0$ або $a \cos 2x + b \cos x + c = 0$. Скориставшись формулою $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$, зведемо ці рівняння до однієї функції, у зв'язку з чим вони перетворюються до попередніх рівнянь;

5) $a \operatorname{tg} x + b \operatorname{ctg} x = 0$. Скористаємося формулою $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1$ і перетворимо рівняння до виду

$$a \operatorname{tg} x + \frac{b}{\operatorname{tg} x} = 0. \text{ Введемо заміну } \operatorname{tg} x = t \text{ і отримаємо}$$

дробово-раціональне рівняння: $at + \frac{b}{t} = 0$. Розв'язавши його відносно t , маємо:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = t_1 \\ \operatorname{tg} x = t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \arctg t_1 + \pi n \\ x_2 = \arctg t_2 + \pi n \end{cases}, \quad n \in Z \text{ (Росва, 2002).}$$

Таким чином, на заключному етапі формування вмінь розв'язувати тригонометричні рівняння учні повинні засвоїти отримані знання завдяки багатократним розв'язуванням тригонометричних рівнянь, щоразу збільшуючи їх рівень складності.

Висновки. Отже, розглянувши всі етапи та завдання досліджуваної проблеми, слід відзначити, що розвиток схарактеризованих нами вмінь не відбувається безпосередньо, адже цей процес передбачає також засвоєння певних знань і навичок. У зв'язку з цим можемо стверджувати, що процес формування вмінь розв'язувати тригонометричні рівняння залежить від рівня підготовки учнів та способу організації навчання вчителем (Сергеєнкова та ін., 2012). Основою таких умінь є раніше засвоєні знання щодо властивостей тригонометричних функцій, їх графіків та одиничного тригонометричного кола. Знання щодо відповідних етапів формування вмінь дозволяє доцільно підібрати завдання та своєчасно їх ускладнювати. Під час розв'язування більш складних рівнянь важливо використовувати алгоритмічний спосіб вивчення. Таким чином, знання можливих помилок дає змогу випередити їх та

сформувати вміння правильно розв'язувати тригонометричні рівняння.

Перспективи подальших досліджень убачаємо в удосконаленні процесу формування вмінь розв'язувати тригонометричні рівняння старшокласниками та вивченні потреб щодо використання новітніх освітніх технологій навчання на уроках математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Мерзляк, А., Номіровський, Д., Полонський, В., Якір, М. (2018). Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту: підручник для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія. 256 с.

Навчальні програми для 10–11 класів. (2018). URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv> (дата звернення: 10.10.2021).

Росва, Т., Хроленко, Н. (2002). Алгебра і початки аналізу в таблицях. Харків: Країна мрій. 156 с.

Сергеєнкова, О., Столярчук, О., Коханова, О., Пасєка, О. (2012). Педагогічна психологія: навчальний посібник. Київ: Центр учбової літератури. 168 с.

Тести ЗНО онлайн. Завдання за темами з математики. URL: <https://zno.osvita.ua/mathematics/tema.html> (дата звернення: 10.10.2021).

Милерян Е. (2013). Психология труда и профессионального образования. *Избранные научные труды* / автор-составитель В. Милерян. Киев: НПП «Интерсервис». 290 с.

REFERENCES

Merzliak, A., Nomirovskiy, D., Polonskyi, V., Yakir, M. (2018). *Matematyka: algebra i pochatky analizu ta heometrii*. Riven standartu [Mathematics: algebra and the beginnings of analysis and geometry. Standard level]: pidruchnyk dlia 10 kl. zakladiv zahalnoi serednoi osvity. Kharkiv: Himnaziia. 256 s. [in Ukrainian].

Navchalni prohramy dlia 10–11 klasiv [Curricula for 10–11 grades]. (2018). URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv> (data zvernennia: 10.10.2021). [in Ukrainian].

Roieva, T., Khrolenko, N. (2002). *Algebra i pochatky analizu v tablytsiakh* [Algebra and the beginnings of analysis in tables]. Kharkiv: Kraina mrii. 156 s. [in Ukrainian].

Serhieienkova, O., Stoliarchuk, O., Kokhanova, O., Pasiaka, O. *Pedahohichna psykholohiia* [Pedagogical psychology]: navchalnyi posibnyk. Kyiv: Tsentr uchbovoi literatury. 168 s. [in Ukrainian].

Testy ZNO onlain. Zavdannia za temamy z matematyky [EIE tests online. Problems on topics in mathematics]. URL: <https://zno.osvita.ua/mathematics/tema.html> (data zvernennia: 10.10.2021). [in Ukrainian].

Mylerian E. (2013). *Psykholohiia truda y professionalnoho obrazovanyia*. [Psychology of work and vocational education]. *Yzbrannye nauchnye trudy* / avtor-sostavitel V. Mylerian. Kyev: NPP «Ynterservys». 290 s. [in Russian].

Дата надходження до редакції: 23.11.2021 р.